

Rileggere un articolo pubblicato nel 2000 con occhi del 2018: Che cosa resta, che prospettive sono state raggiunte, che traguardi sono ancora lontani?

Bruno D'Amore^{1,2} e Martha Isabel Fandiño Pinilla²

¹*Professor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

²*NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Abstract. *Based on the request of the director of the important Mexican journal "Educación Matemática", we analyze one of our articles published in this journal in 2000. In it we proposed hypotheses on the future development of research in mathematics education. Relying on current research, we discuss the relevance and significance of those hypotheses, formulated 18 years ago. The aim is to show how current research has evolved over the last twenty years.*

Keywords: research in mathematics education, general didactics and disciplinary didactics, semiotics, devolution, personal relation with mathematical knowledge, teacher training.

Sunto. *Basandoci sulla richiesta della direttrice dell'importante rivista messicana "Educación Matemática", analizziamo un nostro articolo apparso su questa rivista nel 2000; in esso si proponevano ipotesi sugli sviluppi futuri della ricerca in didattica della matematica. Facendo affidamento sull'attuale ricerca, si discute della pertinenza e della significatività di quelle ipotesi, formulate 18 anni fa. Lo scopo è di mostrare come si sia evoluta la ricerca attuale nell'ultimo ventennio.*

Parole chiave: ricerca in didattica della matematica, didattica generale e didattica disciplinare, semiotica, devoluzione, relazione personale con il sapere matematico, formazione docente.

Resumen. *Atendiendo la solicitud hecha por la directora da la importante revista mexicana "Educación Matemática", analizamos un artículo nuestro publicado en dicha revista en el año 2000; en dicho trabajo se hacían hipótesis acerca de los desarrollos futuros de la investigación en didáctica de la matemática. Haciendo referencia a los resultados de la actual investigación, se discute sobre la pertinencia y la significatividad de estas hipótesis, formuladas hace ya 18 años. El objetivo es el de mostrar cómo ha evolucionado la investigación en nuestro campo durante estos últimos veinte años.*

Palabras clave: investigación en didáctica de la matemática, didáctica general y didáctica disciplinar, semiótica, devolución, relación personal con el saber matematico, formación docente.

1. Premessa

La rivista *Educacion Matematica* è nata nel 1989, realizzata dalla *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.* (SOMIDEM), esce tre volte l'anno ed è la rivista in lingua spagnola più antica del mondo. Ha un riconoscimento internazionale di grande prestigio. In questo 2018 pubblica il suo 30° volume; la sua storia viene divisa dalla direzione attuale in 2 periodi: dal 1989 al 2003 e poi dal 2004 a oggi, 2018. [Tanto per fare un paragone: la rivista italiana *La matematica e la sua didattica* è nata nel 1987, si è pubblicata fino al 2009, per 23 anni; è stata ferma per 6 anni e ha ripreso le pubblicazioni dal 2016, anno 24; in questo 2018 pubblica dunque il suo 26° volume].

Nel 1989 la didattica della matematica era appena nata, un neonato impaziente e impetuoso che aveva voglia di sostituire banalità prive di scientificità assai diffuse nel mondo della scuola che nuocevano all'apprendimento della matematica, anziché favorirlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014, 2015b). Si trattava di una vera e propria rivoluzione, proponendo la prima teoria che si possa ascrivere a uno studio scientifico dell'apprendimento della matematica, la *teoria delle situazioni*. La storia ci mostra come, a questa prima teoria, fecero poi seguito varie altre.

Nel 1989 molti dei celebri articoli che hanno portato il caro amico e maestro Guy Brousseau alla prima medaglia Klein nel 2003, come atto (dovuto) di riconoscenza planetaria, erano già stati pubblicati; i matematici erano affascinati dal nuovo mondo che Brousseau stava creando per noi (citiamo solo alcuni dei lavori più rilevanti pubblicati fra il 1972 e il 1989: Brousseau 1972; 1980a, b; 1982; 1984; 1986a, b, c; 1988a, b, c, d; 1989a, b; Brousseau & Brousseau, 1987; Brousseau & Pérez, 1981).

Una storia raccontata in prima persona dei primi passi di quella che poi si chiamerà *Didattica della matematica* è stata registrata da Guy Brousseau su richiesta della direzione del convegno internazionale che si è svolto a Santa Marta (Colombia) nel settembre 2015.¹ Segnaliamo anche un lavoro di Brousseau che mette in rilievo le relazioni fra la ricerca in didattica della matematica e lo sviluppo dell'epistemologia della matematica che può essere letto in chiave storico-evolutiva (Brousseau, 2008).

Un fatto che ci sconvolge, consapevoli come siamo di questa storia, sta nella superficialità colpevole e nell'ignoranza arrogante di chi ritiene di creare nuove teorie, senza ritenere necessario conoscere le precedenti, accusando le teorie iniziali, in particolare la teoria delle situazioni, di essere “teorie superate del passato”; sarebbe come se René Descartes avesse, nel creare la geometria

¹ Convegno Internazionale *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9–11 settembre 2015, organizzato da Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla per conto della Universidad de La Sabana, Chia, Colombia. Atti on line: <http://congresodidacticamatematica.unisabana.edu.co> (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015a).

analitica, disdegnato e ridicolizzato la geometria degli *Elementi* di Euclide. Che questo fatto sia più diffuso di quanto si creda e che tipo di sprezzante critica meriti è testimoniato in D'Amore e Fandiño Pinilla (2013a).

La rivista *Educación matemática* nacque dunque nel 1989, poco dopo la nascita ufficiale della didattica della matematica che in molti riconosciamo convenzionalmente nel 1986 a causa di uno dei lavori più significativi di Brousseau (1986c); e già 10–11 anni dopo le cose erano molto diverse: si dettavano corsi universitari con quel nome mentre convegni e congressi, cattedre universitarie, dottorati di ricerca, riviste specifiche del settore affollavano sempre più diffusamente il nostro mondo. E così, già nel 2000 sembrava fosse giunto il momento di trarre bilanci, complice anche il cambio di millennio: proprio nel 2000 pubblicammo su *Educación Matemática* un articolo il cui titolo è emblematico: *La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses* (D'Amore, 2000) (*La didattica della matematica al cambio di millennio: radici, vincoli e interessi*). Dunque, sembrava già necessario, nel 2000, fare il punto e profetizzare l'evoluzione futura di questi studi e di queste ricerche.

Non è stato quello il nostro unico articolo pubblicato nel cosiddetto “primo periodo” della rivista; per esempio, nel 2002 ci sembrò che si dovesse tornare a parlare con vigore e correttezza scientifica delle geniali idee lungimiranti di Brousseau perché già cominciavano movimenti di ingenui detrattori che, senza in realtà aver studiato a fondo le sue idee, le ridefinivano in termini banali e poco scientifici (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002). Tant'è vero che Bernard Sarrazy (1995) aveva già evidenziato le storture di chi accedeva a questo nuovo mondo della didattica della matematica senza studiarne i termini specifici definiti con pazienza e lungimiranza, reintroducendoli con leggerezza e banalità, solo per sentito dire. Per esempio, in quel lavoro Sarrazy dà almeno 50 diverse accezioni distorte e banali della prima idea fondante della teoria delle situazioni, quella di contratto didattico sulla quale si stanno accentrando da anni nuovi studi analitici con rinnovato vigore (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017). Sarebbe come tenere un corso universitario sui fondamenti della geometria reinventando le definizioni euclidee basandole su sentiti dire o solo sul suono delle parole.

Siamo stati invitati dalla direzione di *Educación Matemática* a prendere in esame uno dei diversi articoli da noi pubblicati fra il 1989 e il 2003; abbiamo scelto proprio quello del 2000 nel quale, ispirati forse proprio dal cambio di millennio, fatto epocale che non capita spesso, almeno dal punto di vista numerico, sembrava avere senso e attraente fare previsioni per il futuro. Non si tratta di un lavoro di ricerca (gli altri da noi pubblicati su quella rivista, prima e dopo il 2003, lo sono tutti, in verità), ma ci sembra che questa scelta sia perfettamente in linea con le nuove prospettive che si vedevano sorgere in quegli anni. Dunque, ci sembra che il tema trattato in quel 2000 sia perfettamente adeguato a questa ricorrenza, 30 anni di vita della rivista.

2. Contesto accademico, concettuale, sociale nel quale si sviluppò il contenuto che si descrive nell'articolo scelto

Il contesto dell'articolo è descritto brevemente nel suo:

Sunto. Questo articolo è idealmente diviso in due parti. Nella prima si tenta una strutturazione teorica della didattica della matematica all'interno di un panorama assai più vasto (radici) che va dalle altre didattiche disciplinari, alla didattica generale, alla pedagogia (collegamenti). Nella seconda si ipotizzano scenari di possibili sviluppi nella ricerca futura (interessi). (D'Amore, 2000, p. 39)

Dividiamo dunque la presentazione dei contenuti dell'articolo in due parti, così come si annuncia nel sunto.

Prima parte

Uno dei dibattiti dell'epoca riguardava, più nel campo pedagogico che in quello matematico, le relazioni tutte da definire fra le didattiche disciplinari e la didattica generale. Fra le didattiche disciplinari, in quell'epoca erano soprattutto vigorosi lo studio e la ricerca in didattica della matematica; altre discipline muovevano i primi passi, altre dovevano ancora nascere (alcune non sono mai nate, confuse come sono ancora oggi fra il buon senso, la disciplina stessa, la divulgazione della disciplina e la pedagogia). Ma la didattica generale era assai viva da diversi anni, come disciplina autonoma, liberatasi da quello che alcuni pedagogisti, passati alla didattica generale, chiamavano “il giogo della pedagogia”. Alcuni studi teorici su questi legami erano già stati compiuti (D'Amore & Frabboni, 1996), altri seguirono di lì a pochi anni (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; D'Amore & Frabboni, 2005).

In questa prima parte, dunque, si proponeva una storia del processo: dalla filosofia, alla pedagogia, alla didattica generale, citando filosofi, pedagogisti, sociologi e didatti generali, discutendo sugli aspetti descrittivi e normativi (per esempio, il principio generale dell'educazione: metodi e finalità) che hanno accompagnato, all'interno della pedagogia, il processo di creazione della didattica generale. E mettendo in evidenza le differenze fra pedagogia, scienza dell'educazione, scienza della formazione, didattica generale. Fra gli autori moderni citati: Émile Durkheim (1922/1968), Jean Brun (1981, 1996), Gaston Mialaret (1982), Maria Luisa Schubauer Leoni (1996), François Conne (1996); si noti che i primi sono pedagogisti o psicologi, mentre questi due ultimi sono già studiosi militanti nel campo della didattica della matematica, costretti comunque ancora a fare i conti con la didattica generale, le scienze dell'educazione, le didattiche disciplinari, l'epistemologia genetica. Il dibattito continuo riguardava il sapere, la sua natura.

Ci pare qui doveroso fare un inciso.

Furono, quelli fra il 1970 e il 1990, anni in cui si cominciò a parlare di scienza del ... o della ..., a proposito di discipline che, fino a pochi anni prima, mai avrebbero aspirato a tale denominazione. Diciamo che, nel mondo

delle scienze, dopo le “dure”, a seguito di alcuni anni di dibattito, si cominciavano ad accettare scienze più “deboli”. Cerchiamo di spiegare brevemente questo percorso, ricorrendo principalmente a D'Amore (2007).

Il termine *teoria scientifica* o *scienza* è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, ...) condivisa, coerente, comunicabile e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, ...).

Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell'idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di *paradigma* di Thomas Kuhn (1957); si intende con *paradigma* l'insieme delle ipotesi teoriche generali e l'insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza. Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c'è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di “paradigma”; la fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, assenza di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn (1957) più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo “rivoluzioni”, dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.

Un altro contributo fondamentale è quello proposto negli anni '60 da Imre Lakatos (Lakatos & Musgrave, 1960), con l'idea di *programma di ricerca*, cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; un'euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare.

Un altro notevole contributo teorico è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni '80 (Bunge, 1985): la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esattamente descrivibili, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l'insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza

(religioni, ideologie, politiche, ...) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i “cambi” nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di “rivelazioni”, controversie, pressioni sociali; nei secondi c’è un cambio continuo a causa dei risultati della ricerca stessa.

Secondo richieste più “deboli”, una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare “scienze” appunto, tali domini di studio. Questa richiesta “debole” ha fatto proliferare negli ultimi anni l’appellativo di “scienze” dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità e riproducibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come “rigoroso”, “vero” ecc., pur mantenendosi, tende a subire profonde modifiche.

Quel che c’è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato. In questa direzione, Thomas Romberg, alla fine degli anni ’80 (Romberg, 1988), per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile, affermava che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano ampiamente condivise;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sui quali il gruppo è d’accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari; è sotto gli occhi di tutti l’esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori nelle varie didattiche disciplinari che hanno interessi comuni, per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise, che danno (da alcuni decenni) spiegazioni di carattere causale, che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso; essi hanno convegni specifici e riviste specifiche, all’interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti ampiamente condivisi (D’Amore, 2001a). Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che molte

didattiche disciplinari hanno tutte le caratteristiche per poter essere considerate scienze consolidate e stabili.

Torniamo all'articolo del 2000 che stiamo esaminando. Solo per chiarire che il dibattito non era tutto di quegli anni, ma che aveva una notevole storia secolare, mostriamo che la base dello studio delle problematiche di base della didattica delle scienze (compresa la matematica) certamente è già presente nella *Encyclopédie* di Gianbattista Le Rond d'Alembert e Denis Diderot, dunque nella II metà del XVIII secolo, soprattutto negli articoli: Analisi, Sintesi, Metodo, Elementi di scienze. Si tratta, a nostro avviso, di uno studio già specifico di didattica, che si differenzia dagli interessi generali della pedagogia, proponendo problemi sull'apprendimento della scienza da parte di giovani allievi. In un certo senso è già un atteggiamento ascrivibile alla didattica disciplinare.

A nostro avviso si stava già configurando la futura distinzione fra:

- la disciplina in sé così com'è conosciuta e praticata dagli specialisti, dagli accademici;
- la didattica generale in sé, con le sue asserzioni generali credibili e garantite da riflessioni significative condotte da esperti del settore;
- la didattica disciplinare in sé, che ha diversi e propri specifici parametri, paradigmi e obbiettivi.

Seguiva poi un'analisi storica ed epistemologica che non riportiamo qui, ma che permette di giungere a un'altra proposta analoga, ma più dettagliata, fra contenuti:

- i contenuti della disciplina d , stabiliti dalla sua stessa evoluzione, dall'accademia, a partire dalla sua storia;
- i contenuti della didattica di quella disciplina, D_d , che ha come obiettivo di studio la sistemazione teorica (nell'ottica di insegnamento/apprendimento efficace) degli elementi della disciplina d : i contenuti specifici di D_d non sono più i contenuti della disciplina d , sono nuovi rispetto a d ;
- i contenuti di un'altra teoria, più generale, che potrebbe identificarsi come quella che si pone il problema generale di come passare dal caso specifico di d ai contenuti di D_d , quale che sia la disciplina d ; questa sarebbe la didattica generale.

A quel punto, nell'articolo si esaminavano alcune caratteristiche della storia dell'insegnamento della matematica, dall'antichità agli anni '70, quando nacque il problema assai più serio e significativo dell'apprendimento della matematica, dando il via alla moderna didattica della matematica. Si parlava dunque di teoria delle situazioni, dando spazio agli studi specifici relativi alla trasposizione didattica, all'ingegneria didattica, al contratto didattico, idea di concetto, teoria degli ostacoli, citando Lev Vygotskij (1934/1990, cap. IV).

Nel tentativo di dar voce a varie componenti in questo dibattito storico, decidemmo di fare riferimento alle seguenti posizioni, quelle che

maggiormente vennero accolte all'inizio della storia della didattica della matematica:

- Gerard Vergnaud (Vergnaud, Holbwachs, & Rouchier, 1977, p. 9):
È necessario scartare ogni schema riduzionista: la Didattica non è riducibile né alla conoscenza di una disciplina, né alla Psicologia, né alla Pedagogia, né alla Epistemologia. Essa suppone tutte le precedenti ma non può ridursi a nessuna di esse; dato che ha un'identità propria, i propri problemi e i propri metodi. Questo è un punto condiviso dai ricercatori che hanno scelto questa direzione.
- Jean Brun (1981, p. 15): “Il rinnovamento del termine ‘didattica’ nelle Scienze dell’educazione vuole restaurare l’importanza dell’analisi dei contenuti dell’insegnamento”.
- Daniel Lacombe (1985, p. 394): “La didattica include essenzialmente la trasmissione della conoscenza e delle capacità; questa costituisce, di conseguenza, il nucleo cognitivo della ricerca sull’insegnamento”.
- François Audigier (1990, p. 7): “La Didattica si differenzia dalla Pedagogia giacché tiene in conto sistematicamente i contenuti disciplinari”.

Quanto precede si riferisce alla didattica generale e al suo interesse verso le discipline. Ma se pretendiamo definire che cosa sia una didattica disciplinare, vediamo che cosa dicono ben noti autori al riguardo:

- Régine Douady (1984, p. 8): La didattica della matematica è:
lo studio dei processi di trasmissione e di acquisizione dei diversi contenuti di questa disciplina (la Matematica) [e] si propone di descrivere e spiegare i fenomeni relativi alla relazione fra l’insegnamento e l’apprendimento. Essa non si riduce assolutamente a cercare il modo migliore di insegnare un determinato concetto.
- Gerard Vergnaud (1985, p. 22): “La didattica di una disciplina (...) studia i processi di trasmissione e di acquisizione in relazione con il dominio specifico della disciplina o delle scienze vicine con le quali interagisce”.

Va detto che nel 1999 era uscito un nostro lungo testo nel quale la didattica della matematica era studiata in tutti i suoi dettagli, anche in relazione ai temi che qui si stanno delineando (D’Amore, 1999).

Per conoscere la storia dell’idea di didattica, così come la si concepisce oggi, si raccomanda di cominciare con Artigue e Douady (1986) le quali, per quanto con alcune differenze tra loro, propongono come anno di nascita in Francia il 1974.

In quanto al feroce dibattito relativo alla formazione dei docenti di matematica, facciamo attualmente riferimento a Fandiño Pinilla (2003a). Nel nostro articolo in analisi, si concludeva:

Nel millennio anteriore abbiamo cercato di debellare l’idea, ancora viva, che: “per insegnare Matematica è sufficiente conoscere la Matematica”. Non può essere

così e mai lo è stato: già nel secolo XVIII si era compreso che questo non è possibile! (D'Amore, 2000, p. 47)

raccomandando le seguenti letture: Godino (1996) e D'Amore e Martini (2000) per un approfondimento sul tema. Qui ci limitiamo a ricordare che Felix Klein già alla fine del secolo XIX lamentava la mancanza di una preparazione universitaria per la professione di docente di matematica (Loria, 1933). Secondo Klein il periodo degli studi universitari costituisce semplicemente una parentesi, che egli denominò *parentesi universitaria*. Prima, il futuro docente è allievo di scuola secondaria; dopo di che vive questa parentesi e, finalmente, diventa insegnante di secondaria; e, siccome non ha avuto nessuna preparazione a questa professione, può solo ricorrere al modello preuniversitario che conosce e che ha vissuto.

Seconda parte

Inizia con due domande che costituivano una vera e propria sfida agli esperti: Che cosa ci si aspetta dai futuri sviluppi? Che tipo di ricerche potranno assumere interesse rilevante?

Per diversi motivi che vengono brevemente esposti qui subito dopo, la scommessa era sui seguenti temi:

1. registri, semiotica e noetica;
2. il problema della mancata devoluzione;
3. il problema della relazione personale con il sapere;
4. l'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente.

Qual era la rilevanza ai tempi del dibattito dell'epoca (2000), nei contesti accademico, concettuale, sociale? Distinguiamo i quattro punti per fare un'analisi più puntuale, anche se breve.

1. Registri, semiotica e noetica

Contesto accademico. Nel mondo accademico questi temi, erano entrati immediatamente, per la loro forza non solo concettuale, ma anche concreta. Si trattava di una nuova strada per l'analisi dei contesti d'aula; se, come noi da sempre affermiamo, uno degli scopi principali della ricerca in didattica della matematica è lo studio analitico delle situazioni d'aula quando il tema è la matematica, questa nuova strada offriva un potente strumento di analisi. Dunque, nel contesto accademico, il tema era assolutamente dominante.

Contesto concettuale. Non c'è dubbio, e lo vedremo anche dopo, che sul piano concettuale l'impatto di questi studi è stato notevole in contesto internazionale. Vorremmo solo ricordare la allora sorprendente idea di "paradosso cognitivo" oggi detto "di Duval",² sul quale sono stati immediatamente scritti molti testi,

² "(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche

anche sotto forma di tesi dottorali. Riteniamo di poter affermare che si è trattato del tema di maggior rilevanza nel campo della didattica della matematica di quel periodo, fra i primi anni '90 e, forse, tuttora.

Contesto sociale. Il mondo della scuola si è subito impadronito, in tutti i continenti, di questi temi molto concreti, temi che affrontano la problematica della didattica in modo molto vicino alla prassi scolare, a tutti i livelli di scolarità.

2. Il problema della mancata devoluzione

Ricordiamo che si intende con *devoluzione* la prima fase che, nella teoria delle situazioni, viene proposta per definire la cosiddetta situazione adidattica. Essa è talmente ben delineata e costruita, che è servita di base per molti progetti didattici concreti da portare in aula e tutt'oggi riveste un interesse enorme non solo teorico, ma anche empirico, nella prassi docente. Si dà quasi per scontato che la devoluzione abbia successo automatico, che gli studenti cioè accettino di “implicarsi” personalmente nell'affrontare il problema, il compito che l'insegnante propone nel momento della devoluzione (la seconda fase della definizione di situazione adidattica è, infatti, l'*implicazione*). Ma se essa non ha successo, tutto il costruito teorico ipotizzato nella teoria delle situazioni crolla. Quali sono le possibili cause del fallimento della devoluzione? A quei tempi, fine del II millennio, ci si preoccupava di studiare l'insorgere di queste cause, ma di fatto non c'erano studi scientifici al riguardo, solo esempi dettati da esperienze concrete. In questo nostro articolo del 2000 si prevedeva che questo sarebbe stato un tipo di studi del futuro.

Contesto accademico. Se consideriamo, come da sempre noi proponiamo, che la didattica della matematica possa essere pensata come una matematica applicata (*applied mathematics*),³ il problema del fallimento nella fase di

che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considerano le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche” (Duval, 1993, p. 38; la traduzione è nostra, concordata con l'Autore).

³ Si intende oggi con la dizione *matematica applicata* l'insieme di vari aspetti e di differenti rami della matematica i cui cultori si occupano dello studio di diverse tematiche matematiche che si sviluppano nell'applicare le conoscenze matematiche ad altri campi (non solo scientifici e tecnici). Ci ispiriamo a Stolz (2002). Nel corso del 2006 si tenne a Torino, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università, il Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Una delle diverse discipline della matematica applicata era, appunto, la Mathematics Education; gli Atti di quel settore del convegno furono pubblicati in un fascicolo di una rivista di didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*,

devoluzione ha aspetti importanti, perché serve a determinare che cosa produce un effetto positivo e che cosa no, in un processo di tipo causale. Il che è proprio la base dello studio della matematica applicata.

Contesto concettuale. Capire i possibili fallimenti di ciascuna fase costituente la definizione (meglio: la descrizione) di una situazione adidattica ci sembrava essere, concettualmente parlando, elemento di rilevanza non solo teorica, ma applicata (Brousseau & Brousseau, 1987).

Contesto sociale. Il distacco fra la ricerca e la prassi è un problema reale e grave in qualsiasi contesto: medicina, biologia, chimica, ... Lo è anche in didattica della matematica. L'origine dei problemi studiati dalla ricerca scientifica in didattica della matematica hanno le loro basi nella realtà empirica dei contesti educativi pubblici (scuole e università). Tuttavia, i risultati della ricerca stentano o almeno ritardano a giungere nelle aule reali, agli insegnanti che potrebbero trarre vantaggi, nel loro agire quotidiano, dalla loro conoscenza. Cercare di capire, attraverso la ricerca, le modalità e le cause di un fallimento in una prassi educativa, appare un vero e proprio problema di forte interesse sociale. Nel 2000 questo era, infatti, un problema sociale molto avvertito.

3. Il problema della relazione personale con il sapere

Più volte e in mille modalità diverse è emersa la constatazione che, l'unico modo per avere la possibilità che un allievo apprenda, è che questi si faccia carico personale del proprio apprendimento (Brousseau, 1986a, b, c). Se questo accade, il sapere non viene più visto dallo studente come un corpo astratto estraneo, un ridondante e vuoto insieme di conoscenze che la società, l'istituzione e l'insegnante hanno scelto per lui, ma come un fatto personale al quale si vuole prima avere accesso e poi del quale si vuole avere dominio, con uno scopo: usarlo. Ma, mentre a parole tutto ciò sembra ovvio e facile, di fatto non lo è. Tutti sanno che il contratto didattico gioca un ruolo determinante in questo processo: lo studente è più propenso a cercare di apprendere che cosa e come rispondere alle richieste dell'insegnante, piuttosto che avere accesso diretto al sapere.

In quegli anni, il dibattito su questo tema era piuttosto forte e il suo studio aveva una certa rilevanza.

Contesto accademico. Il tema di ricerca sotteso a questo problema era dibattuto nei centri di ricerca universitari, dunque a livello accademico. Crediamo di poter affermare che questo era uno dei temi di analisi, se non di ricerca, più presente nei dibattiti.

Contesto concettuale. Da sempre l'essere umano si è chiesto che cosa sia il sapere, che cosa significa sapere, come si usa il sapere, che cosa vuol dire

essere competente, ... Alla fine del secolo XX questi divennero temi di forte discussione, tanto da assumere la veste addirittura di temi di analisi legislativa e curricolare, in molti Paesi, spesso in modo alquanto ingenuo, specie quando si parla di metodi per valutare la competenza raggiunta.

Contesto sociale. Come abbiamo appena detto, l'importanza di questo dibattito nel campo concettuale si mescola con i suoi aspetti sociali. Basti dire che in quasi tutti i paesi del mondo si cominciò a discutere di “raggiungimento delle competenze a scuola”, prima in America Latina e poi anche in Europa. Molti programmi scolastici nazionali o indicazioni nazionali ministeriali vollero tener conto di questa tematica, dando definizioni non sempre idonee e imponendo nuovi traguardi da far raggiungere a studenti e docenti.

4. L'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente

Su questa tematica abbiamo già detto qualcosa, denunciando la distanza fra ricerca scientifica empirica (ricerca condotta da nuclei di esperti ricercatori nelle aule, con tecniche di ricerca diverse che diventavano sempre più precise e significative) e la prassi. Di molti fenomeni di insuccesso apprenditivo oggi si conoscono le ragioni, la ricerca ha rivelato quali siano i punti critici che portano all'insuccesso apprenditivo in diverse situazioni (aveva cominciato Brousseau già negli anni '70, studiando e denunciando i famosi “effetti”). Ma quando l'insegnante svolge il proprio curriculum in aula, tende a creare le stesse situazioni negative di apprendimento denunciate da Brousseau e da altri studiosi, perché non conosce questi risultati. Ci si chiedeva, allora: Come colmare questo iato? Come saldare questo vuoto?

Contesto accademico. Valga quanto già detto in precedenza: se la ricerca universitaria si fa carico non solo di eseguire la ricerca ma anche di trovare una modalità affinché l'insegnante sappia dei risultati ed eviti dunque di incorrere in errori che rendono impossibile l'apprendimento dei propri allievi, allora questa ricerca si trasforma in qualcosa di importante dal punto di vista accademico, dando una dignità diversa e più significativa ad essa.

Contesto concettuale. Ma tale iato non è solo un fatto che accade senza motivi, ci sono cause che vanno studiate concettualmente. C'è una successione che sembra facilmente percorribile: evidenziazione di un problema di mancato apprendimento di un determinato tema T – studio concettuale di questo fenomeno da parte di ricercatori universitari – elaborazione di un piano di ricerca – effettuazione della ricerca – scoperta dei motivi che generano il mancato apprendimento di quel determinato tema T – comunicazione dei risultati di tale ricerca ai docenti – eliminazione dei fattori che portano al mancato apprendimento detto. Questa sequenza sembra assolutamente lineare, logica, semplice ma così non è ... Ciò determina un interesse concettuale del fenomeno della mancata trasmissione dei risultati della ricerca a quelli che dovrebbero essere i naturali destinatari di essi, i docenti. Non è solo un fatto

empirico, ma concettuale: Che cosa lo determina?

Contesto sociale. Ci pare sia ovvio l'interesse di tipo sociale, sulla base di quanto abbiamo appena detto. I corsi di formazione per insegnanti in servizio e per futuri insegnanti erano (e sono) innumerevoli; molti avevano lo scopo proprio di far conoscere agli insegnanti i risultati della ricerca in didattica della matematica.

3. Evoluzione e sviluppo della nostra prospettiva sul tema: Relazione fra il contenuto dello scritto in esame e il nostro lavoro attuale

Affrontiamo ora l'analisi odierna dell'evoluzione e dello sviluppo, a notevole distanza di tempo, delle prospettive che, in quell'anno 2000, si ipotizzavano rispetto ai quattro temi proposti:

1. registri, semiotica e noetica;
2. il problema della mancata devoluzione;
3. il problema della relazione personale con il sapere;
4. l'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente.

1. Registri, semiotica e noetica

Oggi tutti accettano l'idea che nessun oggetto matematico possiede una realtà oggettiva; tutti oggi accettano di fare i conti con il "paradosso cognitivo" enunciato da Raymond Duval. La facile previsione si è rivelata esatta. Dato un concetto matematico, cioè, in realtà, date una o più sue rappresentazioni semiotiche, l'allievo deve farlo proprio, costruirlo cognitivamente attraverso queste azioni:

- *rappresentarlo* in un dato registro
- *trattare* le sue rappresentazioni all'interno di quello stesso registro
- *convertire* tali rappresentazioni da un registro a un altro.

Tutte queste operazioni metasemiotiche sono di grande rilevanza e addirittura essenziali per l'apprendimento. Non si tratta di studi astratti o inutilmente complessi, senza una reale necessità, come potrebbe pensare chi legge superficialmente. Ma ci sono voluti anni per capirlo.

Gli studi teorici sulle tesi di Duval hanno portato a risultati formidabili, alcuni sorprendenti. Ci limitiamo a citarne solo alcuni tra quelli più vicini a noi (Santi, 2011a, b; Sbaragli & Santi, 2011; Iori, 2017, 2018).

Altri studi, condotti come significative esperienze in aula, hanno mostrato come le parole di Duval fossero profetiche per quanto concerne l'apprendimento, il che conferma quanto si era ipotizzato nel 2000; si veda un esempio in geometria nella scuola primaria (Asenova, 2018).

Vari autori, noi stessi, spinti dallo studio della semiotica e realizzate

moltissime esperienze in aula, siamo arrivati a concepire un volume che riassume teorie e prassi (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013); tale volume si è rivelato molto utile per la riflessione e per la formazione degli insegnanti, non solo in Italia.

Il paradosso cognitivo di Duval sembrava essere in prima istanza una novità assoluta nel campo della semiotica come teoria, dell'apprendimento della matematica e fors'anche sul piano filosofico; ma nostri studi successivi hanno portato a dimostrare che ciò è falso, che la posizione di Duval è inseribile in una tradizione molto antica che i didatti della matematica non avevano precedentemente esplorato (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015).

Vogliamo anche far notare come, a partire dalle prime illuminanti incursioni di Raymond Duval nel mondo della semiotica (Duval, 1988a, b; 1993; soprattutto: 1995), siano poi nate teorie che, pur essendo del tutto diverse, fanno riferimento anch'esse alla semiotica come base teorica ed empirica.

Vogliamo riferirci, come primo esempio, all'EOS (Enfoque Onto Semiótico) che ha avuto un successo internazionale notevole (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017; D'Amore & Godino, 2006, 2007; Font, Godino, & D'Amore, 2007; Godino & Batanero, 1994; solo per fare alcuni esempi).

Come secondo riferimento citiamo la TO (Theory of Objectification), una teoria attualmente fra le più apprezzate in contesto internazionale (D'Amore, 2015; D'Amore & Radford, 2017; D'Amore, Radford, & Bagni, 2006; Radford, 1997; 2002; 2003; 2004; 2005; 2006; 2013a, b; 2014). A noi pare particolarmente interessante lo scritto Radford (2017) nel quale il creatore della TO svela le basi personali sulle quali la teoria fu ideata, concepita e costruita.

La proliferazione degli studi in didattica della matematica su temi relativi alla semiotica fu tale che nel 2006 si decise di pubblicare una rassegna internazionale su di essi, invitando i maggiori protagonisti a delineare le peculiarità del loro specifico filone di ricerca; per questo scopo si produsse un numero speciale della rivista *Relime* (Radford & D'Amore, 2006).

In questi ultimi anni, università e case editrici hanno cercato di produrre lavori di sintesi sulle ricerche in semiotica, destinati a docenti in formazione e a studenti di master e dottorato di ricerca, anche, appunto, come materiale idoneo all'avvio alla ricerca (Duval, 2017; Duval & Saenz Ludlow, 2016).

2. Il problema della mancata devoluzione

Su questo tema non si sono sviluppati studi specifici, come era invece nelle nostre previsioni. Quel che supponevamo è che non si tratti solo di un problema affettivo o relativo alle modalità dell'istituzionalizzazione. Il nodo del problema potrebbe avere le sue radici nell'incapacità di lavorare con queste necessarie operazioni semiotiche e metasemiotiche, con la conseguente rinuncia da parte dello studente. Oppure potrebbe risiedere nell'incapacità di

captare e accettare il passaggio della relazione personale con il sapere all'istituzionalizzazione. Cioè si possono intendere la noetica e le difficoltà legate al suo accesso come ulteriore causa del fallimento della fase di devoluzione (D'Amore, 2003a).

Tuttavia, molti lavori (di quelli citati in precedenza) mostrano le difficoltà degli studenti in questo campo. Fra i più recenti, Becerra Galindo (2017) fissa la sua attenzione sulle difficoltà di interpretare le rappresentazioni semiotiche di insiemi infiniti, rappresentazioni spesso ambigue che appaiono sui libri di testo e che sono usate con ingenuità critica da alcuni insegnanti; Ramírez Bernal (2017), più in generale, studia le difficoltà di apprendimento degli studenti universitari, mettendo in evidenza, in particolare, le difficoltà di gestione delle rappresentazioni semiotiche; egli discute di ciò con i docenti coinvolti nella ricerca, all'inizio spesso neppure consapevoli di queste difficoltà.

3. Il problema della relazione personale con il sapere

Nel nostro lavoro del 2000, esaminato in questo articolo, si cercava di avviare una discussione critica sull'idea di "concetto", visto l'intreccio complesso di interpretazioni che si proponevano in quel periodo. Riteniamo di poter affermare che era allora ancora rilevante la posizione cosiddetta antropologica che mette in evidenza l'importanza delle relazioni fra $R_I(X,O)$ [relazione istituzionale con l'oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [relazione personale con l'oggetto del sapere] (simboli e terminologia di Chevallard, 1992). Ovviamente, qui, per "oggetto di sapere" si intende "oggetto *matematico* del sapere" ciò che Chevallard (1991) definisce come:

un emergente da un sistema di prassi nel quale si manipolano oggetti materiali che si scompongono in diversi registri semiotici: registro orale; delle parole o delle espressioni pronunciate; registro dei gesti; dominio della iscrizione o meglio di quel che si scrive o disegna (grafici, formule, calcoli, ...), cioè registro della scrittura. (p. 8)

Su questo tema, a nostro avviso, ci sono stati studi che hanno permesso di chiarire e soprattutto di delimitare il problema; l'idea che alla "costruzione cognitiva di un concetto" parteciperebbero tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la componente personale (di chiunque abbia avuto accesso a questo sapere, non solo l'esperto) è stata suggerita da diversi autori, per esempio Godino e Batanero (1994), per i quali si tratta precisamente di studiare le relazioni fra significato istituzionale e personale degli oggetti matematici. Ma il 1994 è prima del 2000! Diamo questo riferimento solo per collocare storicamente la questione. Alcuni nostri lavori successivi al 2000 hanno affrontato questo tema, per esempio D'Amore (2001a; 2002; 2003a, b; 2004).

Una nuova modalità di studiare, dopo il 2000, la relazione personale con il sapere è di tipo sociologico, modalità che supera e comprende a nostro avviso

quella antropologica. Fra tutti i lavori prodotti in questo campo, suggeriamo solo alcuni fra quelli a noi più vicini (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore, Font, & Godino, 2007, 2008; D'Amore & Godino, 2006, 2007).

Come abbiamo accennato in precedenza, a questo tema è collegato quello assai complesso e controverso delle acquisizioni di competenze; lo studente viene visto non più solo come colui che acquisisce conoscenze, grazie a un rapporto personale con il sapere, ma competenze. E qui va ripetuto che questo modo di vedere le cose scolastiche ha avuto un notevole impatto internazionale anche normativo, per esempio presso molti Ministeri dell'Istruzione o dell'Educazione. Noi abbiamo proposto alla collettività, a partire proprio dalla fine del XX secolo, vari studi a proposito (per esempio, fra i primi: Fandiño Pinilla, 1999; Fandiño Pinilla & Pedraza Daza, 1999), nei quali si configurava un'idea concreta di competenza, e una distinzione fra “competenza in matematica” e “competenza matematica”, la prima endogena, interna, intrinseca alla matematica, la seconda, più interessante, che permette di guardare il mondo con occhi matematici, cioè una competenza che rende possibile interpretare fatti, fenomeni, avvenimenti, oggetti, artefatti con la competenza acquisita in matematica, proprio grazie a un intenso rapporto personale fra studente e sapere (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003, 2006; Fandiño Pinilla, 2003b, 2004, 2005a, b, 2006). Fino ad arrivare a un volume che raccoglie studi compiuti in Colombia, Italia, Spagna e Svizzera, dando risposte complesse e talvolta problematiche a tutti gli interrogativi di ricerca che ci eravamo posti negli anni precedenti (D'Amore, Godino, Arrigo, & Fandiño Pinilla, 2003).

4. L'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente

Nell'articolo del 2000 che stiamo esaminando, si può leggere la seguente frase:

il mondo della ricerca in Didattica della Matematica si dividerà definitivamente in due: coloro che per sempre affronteranno studi a carattere “astratto”, non legati alla realtà dell'aula, e coloro che continueranno a sognare che tutta questa valanga di ricerche, comprese quelle teoriche, dovrebbero confluire nelle aule, formando competenze professionali del docente. (p. 47)

E, poco oltre, un'ottimistica scommessa per il futuro: “In questo millennio si dovrà perseguire un traguardo molto più complesso: costruire un curriculum coerente con i risultati ottenuti nelle ricerche” (p. 47).

Crediamo che il primo punto sia stato centrato in pieno: alcune ricerche sono sempre più astratte, sono sempre più lontane da quelle empiriche che coinvolgono l'aula reale, nella sua incredibile multiforme varietà. Bisogna fare attenzione, però; abbiamo sentito accusare di astrattezza teorie come l'EOS e la TO che, invece, sono di una concretezza ammirevole, affascinante, secondo

noi evidente. Non bisogna confondere la profondità teorica con una supposta lontananza dal mondo della scuola reale; questa identità è falsa, dimostra colpevole leggerezza in chi la sostiene. Dimostra che costui non ha studiato a fondo la/e teoria/e, come invece si dovrebbe fare.

In cambio, ci sono interessanti ricerche empiriche che danno sempre più e sempre meglio idea di come funzionino i meccanismi di apprendimento e di comunicazione, per esempio fra adulti e studenti e fra studenti.

Il secondo punto, invece, è assai lontano dal realizzarsi; abbiamo sentito a volte narrare di paesi nei quali si sono fatte modifiche ai programmi ufficiali di matematica o alle indicazioni ministeriali nazionali con lo scopo dichiarato di tener conto della ricerca in didattica della matematica; ma, a onor del vero, un'attenta analisi ha sempre mostrato che ciò non è vero. C'è talvolta qualche attenzione in più, ma sempre ingenua, assai lontana dalla vera ricerca scientifica. La nostra scommessa su questo punto, dunque, non è stata per ora vinta.

Tutto ciò riguarda evidentemente la formazione professionale degli insegnanti di matematica, quelli in servizio e quelli in formazione. Il tema è fra i più studiati al mondo; esistono addirittura linee di ricerca per dottorati sul tema della formazione docente, in tutto il mondo. Questa volta nemmeno proviamo a dare una bibliografia di riferimento, perché sarebbe immensa. Ci limitiamo a far osservare come sia a nostro avviso necessario cominciare a studiare il nuovo problema della “didattica della didattica della matematica”, dato che in molte, troppe, università del mondo, la disciplina didattica della matematica nei corsi post laurea e per la formazione dei futuri insegnanti di matematica è affidata a colleghi volenterosi ma improvvisati e spesso ingenui che non conoscono questa disciplina e la confondono con la matematica stessa, o con la storia della matematica, con l'epistemologia della matematica, con la matematica divulgativa, con le matematiche elementari da un punto di vista superiori (in memoria di Felix Klein), con giochetti e giochini aventi a che fare con la matematica ricreativa, o con il buon senso e l'esperienza. Su questo punto abbiamo proposto vari studi, fra i quali citiamo solo D'Amore e Fandiño Pinilla (2013b).

Vogliamo far notare una riflessione che ci pare interessante; la versione in lingua spagnola del lavoro appena citato, notevolmente ampliata rispetto al precedente (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017b), appare in un libro già ricordato (D'Amore & Radford, 2017) con prefazioni di Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Ebbene, nella sua Prefazione, Michèle Artigue afferma:

Il (...) testo, scritto con Martha Isabel Fandiño Pinilla, è una riflessione sulla spinosa questione della didattica stessa. In questa riflessione gli autori ci invitano, basandosi sulla loro ricca esperienza in questo campo, a comprendere come il passaggio dall'insegnamento della matematica all'insegnamento della sua didattica modifica i diversi elementi del classico triangolo della didattica. Si percepiscono chiaramente le conseguenze dell'assenza di accordi sui tipi e sui

contenuti dei saperi che devono essere trasmessi, anche se detta assenza non è sufficiente a spiegare le ragioni per le quali i risultati della ricerca didattica hanno tanta difficoltà ad alimentare efficacemente la formazione dei docenti. Non ho potuto non riconoscere una relazione fra questa riflessione e i dibattiti e i lavori che sono stati condotti nella mia stessa comunità a proposito della formazione dei docenti così come dei formatori dei docenti sugli equilibri idonei fra una didattica oggetto e una didattica strumento, così come sulle tecniche e i metodi da sviluppare per ancorare la formazione in realtà di pratica e rispondere nel miglior modo possibile alle necessità dei docenti. (pp. 15–16)

Crediamo che questa testimonianza di tanto illustre personaggio garantisca l'importanza di questo tema fra le future riflessioni doverose per la nostra comunità internazionale.

4. Conclusioni

Questo tipo di esercizio, la revisione critica di un proprio articolo a distanza di quattro lustri, è di straordinaria importanza in una ricerca come la nostra in didattica della matematica che coinvolge sì teorie, ma anche e forse soprattutto realtà empiriche di aula.

Noi già ne facemmo una anni fa. Nel 1998 pubblicammo un articolo (D'Amore, 1998) nel quale si faceva una ricerca strettamente empirica con studenti di diverse età a proposito dell'uso contemporaneo di diversi registri semiotici, per studiare in profondità il trattamento e la conversione, ma dal punto di vista degli allievi. In diverse occasioni, poi, a partire dal 2006, riesaminammo quei risultati (le modalità della loro raccolta, della loro registrazione, della loro interpretazione e, soprattutto, le conclusioni) alla luce delle nuove emergenti e sempre più profonde metodologie di analisi e dei passi da giganti fatti dallo studio dell'uso della semiotica in aula. I risultati critici sono impressionanti! Quelli del 1998 sembrano ora a noi stessi solo i primi incerti passi nella ricerca empirica di base.

A parte le modalità e i risultati, ci si rende conto di come, 18 anni dopo, temi che sembravano il centro dell'universo della ricerca siano scomparsi, desueti o assorbiti in altri; al contrario, temi che balbettavano come neonati si sono imposti e hanno dato luogo a vere e proprie teorie dominanti. Nessun esercizio di auto-analisi a distanza di anni è importante come questo; il che spiega, a nostro avviso, il deleterio continuo insistere di alcuni ricercatori su temi e modalità, mai messe in seria analisi critica.

A parte il personale aumento di consapevolezza critica, questo esercizio è utile per chi, come noi, lavora in dottorati di ricerca, per far sì che i nostri allievi siano allenati e coinvolti in serie ricerche attuali con visioni proiettate sul futuro e non su opache e ingenuie ipotesi di ricerca desuete o superate senza consistenza teorica. I nostri studenti se lo meritano e la ricerca ha bisogno di loro.

Tutto ciò vuole essere un omaggio alla rivista *Educación Matemática*, per il suo contributo internazionale alla ricerca in didattica della matematica.

Riferimenti bibliografici

- Artigue, M., & Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie*, 20(76), 69–88.
- Audigier, F. (1990). Histoire, géographie, éducation civique. *Collège Lycée*, 8. Parigi: CRDP.
- Asenova, M. (2018). *Esperienze relative alle costruzioni geometriche con riga e compasso nella scuola elementare*. Manoscritto inviato per la pubblicazione.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73–89.
- Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 191–201.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Ed.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428–457). Parigi: APMEP.
- Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, 101(3–4), 107–131.
- Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(41), 177–182.
- Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. *Atti della Riunione della III Università Estiva di didattica della matematica di Olivet* (pp. 99–108). Grenoble: IMAG.
- Brousseau, G. (1986a). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Thèse pour le doctorat d'état). Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1986b). *Le jeu et l'enseignement des mathématiques*. (Conferenza al 59^{esimo} convegno AGIEM). Bordeaux.
- Brousseau, G. (1986c). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1988a). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309–336.
- Brousseau, G. (1988b). *Perspectives sur la didactique des mathématiques*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1988c). Traitement de la mémoire des élèves dans le contrat didactique. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Brousseau, G. (1988d). Didactique fondamentale: Didactique des mathématiques et formation des maîtres. *Atti della Riunione della III Università Estiva di didattica della matematica di Olivet* (pp. 10–25). Bordeaux: IREM.
- Brousseau, G. (1989a). Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège. *Petit x*, 21, 47–68.
- Brousseau, G. (1989b). La tour de Babel. *Études en didactique des mathématiques*, 2. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica* (B. D'Amore, Ed.). Bologna: Pitagora.
- Brousseau, G., & Pérez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, N., & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire: Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brun, J. (1981). À propos de la didactique des mathématiques. *Math-École*, 21(100–101), 14–21.
- Brun, J. (1996). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 19–43). Neuchâtel: Délachaux et Niestlé. [Appare anche in: M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnignot (Eds.). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. (pp. 67–83). Grenoble: La Pensée Sauvage].
- Bunge, M. (1985). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Conne, F. (1996). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. In J. Brun (Ed.). *Didactique des mathématiques* (pp. 275–338). Neuchâtel: Délachaux et Niestlé.
- D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*, 13(1), 7–28. [In lingua spagnola: 1998. Objetos relacionales y diversos registros representativos: dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, 5(15), 63–76].
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [In lingua spagnola: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio]. [In lingua portoghese: 2007, *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefazioni di Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau].
- D'Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, 12(1), 39–50.
- D'Amore, B. (2001a). *Scritti di epistemologia matematica. 1980–2001*. Bologna:

Pitagora.

- D'Amore, B. (2001b). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, 8(27), 51–76.
- D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *TED*, 10(11), 63–71.
- D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47–51.
- D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [In lingua spagnola: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Prefazioni di Guy Brousseau e di Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].
- D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 11(35), 90–106.
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni, F., Wallnöfer, G., Belardi, N., & Wiater, W. (Eds.). (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Definizioni: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Versione in lingua tedesca: D'Amore, B. (2010). Voci per il dizionario: Wiater, W., Belardi, N., Frabboni, F., & Wallnöfer, G. (Eds.). (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Definitionen: Fachdidaktik (pp. 98–101), Mathematische Bildung (pp. 227–228), Naturwissenschaftliche (pp. 255–258), Wissenschaft (pp. 362–364)].
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, 14(1), 48–61.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). “Competenze”: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, 17(3), 327–338.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Una riflessione sul termine “competenza” nell'educazione matematica. *Difficoltà in matematica*, 2(2), 155–164.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefazione di Franco Frabboni. Trento: Erickson.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013a). El paso más largo. Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula. *Acta Scientiae. Revista de ensino de Ciências e Matemática*, 15(2), 246–256. Disponible da <http://periodicos.ulbra.br/index.php/acta>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013b). La didáctica della didáctica della matemática: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(4), 325–353.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica*, 11(1), 89–109.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015a). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Prefazione di: Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla. Testi di: Guy Brousseau, John Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Diaz Godino, Salvador Llinares. Atti del Convegno Internazionale: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9–11 settembre 2015, organizzazione scientifica di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla con il coordinamento dell'Universidad de La Sabana. Chía (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015b). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, 27 (3), 7–44.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017a). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to the didactics of mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23–26 marzo 2017. Disponible da <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017b). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 41–66). Prefazioni di Michèle Artigue e di Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponible da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. (In lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefazioni di Raymond Duval, Luis Radford e Carlos Eduardo Vasco. Bogotá:

- Magisterio). (In lingua portoghese: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica. Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefazioni di Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe e Ubiratan D'Ambrosio].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177–212. doi: 10.12802/relime.13.1822. <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del “contratto”*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 38(2), 49–77.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 22(2), 207–235.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.
- D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Relime*, 3(1), 33–46.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefazioni di Michèle Artigue e Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11–40. [Versione in lingua spagnola in D'Amore, B., & Radford, L. (2017), pp. 165–192].
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse d'État). Université de Paris. [Si veda anche: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 1986, 5–31].
- Durkheim, É. (1968). *Éducation et sociologie*. Parigi: PUF. (Lavoro originale pubblicato nel 1922).
- Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7–25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de

- congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 57–74.
- Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 235–253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang. [In lingua spagnola: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle].
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Prefazione di Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Duval, R., & Sáenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Prefazione di Bruno D'Amore. Articoli commentati da Bruno D'Amore e Carlos Eduardo Vasco Uribe. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fandiño Pinilla, M. I. (1999). Alumnos competentes: objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. In M. Bonilla, M. I. Fandiño Pinilla, N. Sanchez, & J. Romero (1999), *La evaluación de profesores de matemáticas* (pp. 32–38). XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Fandiño Pinilla, M. I. (Ed.). (2003a). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2003b). “Diventare competente”, una sfida con radici antropologiche. *La matematica e la sua didattica*, 17(3), 260–280.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2004). “Diventare competente”: una sfida con radici antropologiche. In G. Arrigo (Ed.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004*. Locarno, 24–25 settembre 2004. Locarno: Quaderni Alta Scuola Pedagogica. 109–112.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005a). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. In A. M. Benini & L. Gianferrari (Eds.), *Valutare per migliorarsi* (pp. 40–48). Napoli: Tecnodid.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005b). La competencia matemática: un reto con raíces antropológicas. In AA. VV., *Actas del VII Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy (Argentina), 3–6 maggio 2005. www.edumat.com.ar
- Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. (pp. 21–28). Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana.
- Fandiño Pinilla, M. I., & Pedraza Daza, F. P. (1999). La evaluación de competencias como estrategia para la cualificación de la educación matemática en Colombia. In AA. VV., *Memorias IV Congreso Nacional de Matemática Educativa* (pp. 199–208). Guatemala, noviembre 1999. Città di Guatemala: Ministerio de Educación de Guatemala.
- Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7 and 14.
- Godino, J. D. (1996). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. In L. Puig & J. Calderón (Eds.),

- Investigación y Didáctica de las Matemáticas* (pp. 119–137). Madrid: CIDE (Ministerio de Educación y Ciencia).
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3
- Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5
- Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution*. Cambridge: Harvard University Press.
- Lacombe, D. (1985). La didactique des disciplines. In AA. VV., *Encyclopedia Universalis* (pp. 394–396). Parigi: Les Enjeux.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.). (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Loria, G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique: La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. I. Rapport général. *L'enseignement mathématique*, 34(1), 5–20.
- Mialaret, G. (1982). *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. Caen: CERSE.
- Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matemática e la sua didáctica*, 25(2), 181–189.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Radford, L. (2013b). *De la teoría de la objetivación*. Conferenza inaugurale del XIV

- Convegno Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, Ottobre 9–11, 2013. Atti del convegno omonimo: *Revista Científica*, ottobre 2013, edizione speciale, Disponibile da http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2017). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 217–228.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Numero speciale] (in lingua spagnola, inglese e francese) della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). Introduzione di Luis Radford, conclusione di Bruno D'Amore; articoli di: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R-M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M. R. Wilhelmi; A. Koukhoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; GT. Bagni; F. Arzarello. Disponibile da http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf; <http://luisradford.ca>
- Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 203–216
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Atti del II TME (pp. 97–112). Bielefeld-Antwerpen: IDM Publications.
- Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 88(77), 285–311.
- Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: a comparison between semiotic perspectives. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*. Rzeszów, Polonia, 9–13 febbraio 2011.
- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 28(112), 85–118. [In lingua italiana: Sarrazy, B. (1998). Il contratto didattico. *La matematica e la sua didattica*, 12(2), 132–175].
- Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 4(2), 117–157. Disponibile da: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196>, San Paolo, Brasil: Uniban.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. In E. Gallo, L. Giacardi, & C. S. Roero (Eds.), *Conferenze e seminari 1995–1996*. Torino: Associazione Subalpina Mathesis-Seminario di Storia delle Matematiche “T. Viola”. 21–32.
- Stolz, M. (2002). The history of applied mathematics and the history of society. *Synthese*, 133(1–2), 43–57. doi: 10.1023/A:1020823608217
- Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.),

- Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 20–45). Bologna: Zanichelli-UMI.
- Vergnaud, G., Holbwachs, F., & Rouchier, A. (1977). Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel chez l'élève. *Revue française de pédagogie*, 21(45), 7–15.
- Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: Ricerche psicologiche* (L. Mecacci, Trad. it.). Bari-Roma: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).